



TITLE:

Extreme points of dual spaces and Banach-Stone type theorems (The deepening of function spaces and its environment)

AUTHOR(S):

川村, 一宏

CITATION:

川村, 一宏. Extreme points of dual spaces and Banach-Stone type theorems (The deepening of function spaces and its environment). 数理解析研究所講究録 2018, 2095: 23-28

ISSUE DATE:

2018-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/251700>

RIGHT:

Extreme points of dual spaces and Banach-Stone type theorems

筑波大学数理物質系数域 川村一宏

Kazuhiro Kawamura

Institute of Mathematics

University of Tsukuba

kawamura@math.tsukuba.ac.jp

1 序

本稿では Banach-Stone の定理のヴァリエーションとして、底空間のトポロジーとの関係を考察した結果について報告する. X をコンパクト Hausdorff 空間, E を Banach 空間とする. X 上の E -値連続関数全体に supremum norm $\|\cdot\|_\infty$ を入れた空間を $C(X, E)$ で表す. 特に $C(X, \mathbb{C}) = C(X)$ とする.

定理 1.1 (Banach-Stone) X, Y をコンパクト Hausdorff 空間, $T : C(X) \rightarrow C(Y)$ を複素線形同型写像で $\|\cdot\|_\infty$ に関して等長的であるものとする. このとき連続写像 $\alpha : Y \rightarrow \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ と同相写像 $\varphi : Y \rightarrow X$ が以下を満たすように存在する:

$$Tf(y) = \alpha(y)f(\varphi(y)), \quad f \in C(X), \quad y \in Y.$$

上のような形の作用素を荷重 α , シンボル φ の荷重合成作用素という. 定理 1.1 の一つの証明は, 双対空間における単位球の端点集合を調べることでなされる ([5]).

定義 1.2 A を $C(X, E)$ の複素線形部分空間, $x \in X$ とする. A 上の E に値を取る関数 $\delta_x : A \rightarrow E$ を $\delta_x(f) = f(x)$ で定義する.

- (1) 有界線形汎関数 $\xi : A \rightarrow \mathbb{C}$ で $\|\xi\| = 1$ を満たすものが双対空間 A^* の単位球 $B(A^*)$ の端点 (extreme point) であるとは,

$$\xi = \frac{\alpha + \beta}{2}, \alpha, \beta \in A^*, \|\alpha\|, \|\beta\| \leq 1 \Rightarrow \xi = \alpha = \beta$$

が成立することである.

- (2) (cf. [2]) A の E に関する Choquet 境界を

$$\text{Ch}_E(A) = \{x \in X \mid \xi \in \text{ext}(E^*) \text{ が存在して } \xi \circ \delta_x \in \text{ext}(A^*)\}$$

と定義する.

$\text{Ch}_{\mathbb{C}}(A)$ は通常の A の Choquet 境界 $\text{Ch}(A)$ と一致する. ここでは以下の設定を考える:

設定. X, Y はコンパクト Hausdorff 空間, E は Banach 空間, A, B はそれぞれ $C(X, E), C(Y, E)$ の線形部分空間で以下を満たすとする:

(S1) A, B は任意の定数値関数を含む.

(S2) 任意の $u \in E$ と任意の $x_1 \neq x_2 \in X$ に対し, $f(x_1) = u, f(x_2) = 0$ をみたす $f \in A$ が存在する. B についても同様.

上の条件 (S1), (S2) は部分空間 A, B が連続関数を豊富に含むことを表している. $B(E)$ で E 上の有界線形作用素全体に strong operator topology を入れた空間を表し, $U(E)$ で E 上の線形等長変換全体のなす $B(E)$ の部分空間を表す.

問題 1.3 上の設定の下, 線形全射等距離写像 $T: A \rightarrow B$ に対して, 連続関数 $V = (V_y): \text{Ch}_E(B) \rightarrow U(E)$ および同相写像 $\varphi: \text{Ch}_E(B) \rightarrow \text{Ch}_E(A)$ が, 以下を満たす様に存在するか?

$$Tf(y) = V_y(f(\varphi(y))) \quad y \in \text{Ch}(B).$$

本稿では上の形の作用素を「一般荷重合成作用素」と呼ぶ. $E = \mathbb{C}$ のとき, 上の問いが肯定的であるような T, A, B に関する十分条件がいくつか知られている ([1], [4], [6], [11], [13] 等). 例えば:

定理 1.4 ([11]) T, A, B が次のいずれかを満たせば上の問いは肯定的である.

- (1) T が複素線形で, 任意の異なる $x_1, x_2 \in X$ に対して $f \in A$ が $|f(x_1)| \neq |f(x_2)|$ を満たすように取れる. B についても同様.
- (2) T が実線形で, 任意の $x \in X$ と x の任意の近傍 U , 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $f \in A$ が $\|f\|_{\infty} = f(x) = 1$ かつ $\|f\|_{X \setminus U} < \epsilon$ を満たすように取れる. B についても同様.

しかし上の問題は一般には否定的であることを示す例が、古清水・三浦・高木・高橋各氏によって与えられた [11]。

例 1.5 \mathbb{T} 上の一次関数のなす関数空間 $A = \{az + b \mid a, b \in \mathbb{C}\}$ を考え、線形作用素 $S: A \rightarrow A$ を $S(az + b) = az + \bar{b}$ によって定義する. S は実線形等長変換であるが一般荷重合成作用素でない.

さらに三浦氏は、一般荷重合成作用素でない実線形等長変換を許容する関数空間 A の Choquet 境界 $\text{Ch}(A)$ は、 \mathbb{T} と同相な空間を含まなければならないことを示した ([12]). 従って X が円周のコピーを含まない空間であるとき, $C(X)$ の部分空間 A が (S1)(S2) を満たせば、任意の実線形等距離変換 $S: A \rightarrow A$ は一般荷重合成作用素である. この結果は A, B の仮定は最少に留めておく代わりに、底空間のトポロジーを規定することで Banach-Stone 型の定理を導くという意味で新しい. 三浦氏と筆者は、[12] の議論をより詳しく行うことにより、いくつかの結果を得た ([10]). 本稿で述べる結果はこれらの結果の延長上にある.

2 Extreme point method と得られた結果

$C(X, E)$ の部分空間 A の双対空間 A^* の単位球上の端点集合を $\text{ext}(A^*)$ で表す. Banach 空間 E に対する $\text{ext}(E^*)$ も同様である.

Proposition 2.1 写像

$$\Phi_{X,E} : \text{ext}(E^*) \times X \rightarrow A^*, \quad \Phi_{X,E}(\xi, x) = \xi \circ \delta_x, \quad \xi \in \text{ext}(E^*), \quad x \in X$$

は単射で, A^* の *weak* topology* に関して連続である.

ここで $\mathcal{E}_{X,E} = \text{Im}(\Phi_{X,E})$ とおく. [3] から $\text{ext}(A^*) \subset \mathcal{E}_{X,E}$ が成り立ち, 従って

$$\Phi_{X,E}^{-1}(\text{ext}(A^*)) \subset \text{ext}(E^*) \times \text{Ch}_E(A)$$

が成り立つ. そこで以下の条件を考える:

$$(\text{ext}) \quad \Phi_{X,E}^{-1}(\text{ext}(A^*)) = \text{ext}(E^*) \times \text{Ch}_E(A).$$

例 2.2 例えば以下のような場合に (ext) が満たされる.

(i) $E = \mathbb{C}$.

(ii) A が $C(X)$ -加群.

(iii) ((i) の拡張) E が Hilbert 空間, 単位球面 $S(E)$ に推移的に作用する $\Gamma \subset U(E)$ が存在して A は Γ -不変部分空間, 即ち $\gamma \in \Gamma, f \in A \Rightarrow \gamma \cdot f \in A$ が成り立つ.

A, B が $(S1), (S2), (\text{ext})$ を満たすとする. 全射線形等長写像 $T : A \rightarrow B$ の双対写像 $T^* : B^* \rightarrow A^*$ がまた等長写像であることを用いて以下の可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccc} B^* & \xrightarrow{T^*} & A^* \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{ext}(B^*) & \xrightarrow{T^*} & \text{ext}(A^*) \\ \Phi_Y \uparrow & & \uparrow \Phi_X \\ \text{ext}(E^*) \times \text{Ch}_E(B) & \xrightarrow{\tau_T} & \text{ext}(E^*) \times \text{Ch}_E(A) \end{array}$$

同相写像 $\tau_T = \Phi_X^{-1} \circ T^* \circ \Phi_Y$ を以下の様に表示する:

$$\tau_T(\eta, y) = (\alpha(\eta, y), \varphi(\eta, y)), \quad \eta \in \text{ext}(E^*), \quad y \in \text{Ch}_E B, \quad (1)$$

ここで $\alpha : \text{ext}(E^*) \times \text{Ch}_E(B) \rightarrow \text{ext}(E^*)$, $\varphi : \text{ext}(E^*) \times \text{Ch}_E(B) \rightarrow \text{Ch}_E(A)$ は連続全射.

定理 2.3 ([8]) (1) $y \in \text{Ch}_E(B)$ に対して $V_y : E \rightarrow E$ を

$$V_y(u) = Tc_u(y), \quad u \in E$$

とくと, 写像 $\text{Ch}_E(B) \rightarrow \mathcal{B}(E), y \mapsto V_y$ は連続で, かつ

$$V_y^*|_{\text{ext}(E^*)} = \alpha(\cdot, y).$$

(2) 任意の $y \in \text{Ch}_E(B)$ に対して $\varphi(\cdot, y) : \text{ext}(E^*) \rightarrow \text{Ch}_E(A)$ が定値写像とする. $\varphi(y) := \varphi(\cdot, y)$ とくと, φ は連続全射でかつ

$$Tf(y) = V_y(f(\varphi(y))), \quad f \in A, \quad y \in \text{Ch}_E(B).$$

(3) E が *reflexive* かつ E^* が *strictly convex* とする. (2) の仮定が成り立つとき, $V_y \in U(E)$ かつ $\varphi : \text{Ch}_E(B) \rightarrow \text{Ch}_E(A)$ は同相写像である.

従って E が *reflexive*, E^* が *strongly convex*, A, B が (S1), (S2), (ext) を満たすとするとき, $T : A \rightarrow B$ が一般荷重合成作用素であるためには, 任意の $y \in \text{Ch}_E(B)$ に対して

$$(\text{Stab}) \quad \varphi(\cdot, y) : \text{ext}(E^*) \rightarrow \text{Ch}_E(A) \text{ が定値写像}$$

が成立すればよい. 上の枠組みを用いて, 以下のような [7] の類似を得る.

定理 2.4 ([8]) E は *reflexive* かつ E^* が *strongly convex* とする. A, B は (S1), (S2), (ext) を満たし, さらに次が満たされるとする:

任意の $x \in \text{Ch}_E(A)$, 任意の x の開近傍 U , 任意の $u \in E$ に対して $f \in A$ が以下を満たすように存在する:

$$\|f\|_\infty = \|u\|, \quad f(x) = u, \quad f|_{X \setminus U} \equiv 0.$$

B についても同様.

このとき任意の全射線形 $\|\cdot\|_\infty$ -等長写像 $T : A \rightarrow B$ にたいして条件 (Stab) が成り立ち, したがって T は一般荷重合成作用素である.

注 上のタイプの定理を得るためには, 値域の Banach 空間 E に対して何らかの仮定を置かねばならない ([14]).

[8, 4 節] において, 底空間の位相次元に関わる Banach-Stone 型定理を考察した. そこでの議論をもう少し詳しく行って, 以下の定理を得ることができる.

定理 2.5 X, Y はコンパクト距離空間, E は可分 Hilbert 空間, $A \subset C(X, E), B \subset C(Y, E)$ は (S1), (S2), (ext) を満たす部分空間とし, 更に X の位相次元 $\dim X$ は有限と仮定する. 以下のいずれかの条件が成り立つとき, 任意の全射線形等長写像 $T : A \rightarrow B$ に対して (Stab) が成立し, 従って T は一般荷重合成作用素である.

(1) $\dim_{\mathbb{R}} E = 1$.

(2) $\dim_{\mathbb{R}} E \geq 3$ かつ $\dim_{\mathbb{R}} E \geq 2 \dim X + 1$.

(3) $\dim_{\mathbb{R}} E = \infty > \dim X$.

$T: A \rightarrow B$ に対して (1) により定まる写像 $\varphi: S(E^*) \times \text{Ch}_E(B) = \text{ext}(E^*) \times \text{Ch}_E(B) \rightarrow \text{Ch}_E(A)$ をとり, 任意に固定した $y \in \text{Ch}_E(B)$ に対して

$$\phi_y: S(E^*) \rightarrow \text{Ch}_E(B), \quad \phi_y(\eta) = \varphi(\eta, y) \quad \eta \in \text{ext}(E^*)$$

とおく。条件 (Stab) は各 $y \in \text{Ch}_E(A)$ に対して ϕ_y が定値写像であることに他ならない。上の定理の証明は, 定値写像でない ϕ_y の存在から導かれる条件を考察することでなされる。[8] 同様, 以下の Hurewicz の定理を用いる。

定理 2.6 (Hurewicz の定理)

$f: M \rightarrow N$ を可分距離空間 M, N の間の閉写像とすると, M, N の位相次元に対して以下が成り立つ

$$\dim M \leq \dim N + \sup_{q \in N} \dim f^{-1}(q).$$

$\dim X = 2, \dim_{\mathbb{R}} E = 3$ のとき, 定理 2.5 の仮定は満たされないが, 写像 $\phi_y: S(E^*) = S^2 \rightarrow \text{Ch}_E(A)$ を調べることによって, 以下の定理を得る。

定理 2.7 上と同じ記号の下, X は 2 次元球面・射影平面のいずれをも含まないとする。このとき $A \subset C(X, \mathbb{R}^3), B \subset C(Y, \mathbb{R}^3)$ の間の任意の等距離写像 $T: A \rightarrow B$ は (Stab) を満たし, 従って一般荷重合成作用素である。

$C(X, \mathbb{R}^n), n \geq 4$, に対しても, コンパクト空間族 C_n を定めて, $A \subset C(X, \mathbb{R}^n), B \subset C(Y, \mathbb{R}^n)$ の間の線形等長写像 $T: A \rightarrow B$ に対し,

$$X, Y \text{ は } C_n \text{ に属する空間のコピーを含まない} \Rightarrow T \text{ は一般荷重合成作用素}$$

が成り立つようにできる。一方で

例 2.8 X を 2 次元球面あるいは射影平面とする。 $C(X, \mathbb{R}^3)$ の線形部分空間 A と A 上の等長写像 $S: A \rightarrow A$ で一般荷重合成作用素として表せないものが存在する。

例 1.5 の構成を四元数に対して行うことによって, $C(S^3, \mathbb{R}^4)$ の部分空間 A 上の全射等距離写像 $S: A \rightarrow A$ で一般荷重合成作用素でないものを構成することができる ([9])。

参考文献

- [1] J. Araujo and J.J. Font, *Linear isometries between subspaces of continuous functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 349 (1997), 413-428.

- [2] H. Al-Halees and R.J. Fleming, *Extreme point methods and Banach-Stone theorem*, J. Aust. Math. Soc. 75 (2003), 125-143.
- [3] B. Browski and F. Dutsch, *On some geometric properties of suns*, J. Appr. Th. 10 (1974), 245-267.
- [4] M. Cambern, *Isometries of certain Banach algebras*, Studia Math. 25 (1964-1965), 217-225.
- [5] N. Dunford and J. Schwarz, *Linear operators, vol.1, General Theory*, Interscience, New York, (1958)
- [6] W. Holszynski, *Continuous mappings induced by isometries of spaces of continuous functions*, Studia Math. 26 (1966), 133-136.
- [7] M. Jerison, *The space of bounded maps into Banach space*, Ann. Math. 52 (1950), 309-327.
- [8] K. Kawamura, *Linear surjective isometries between vector-valued function spaces*, J. Aust.Math. Soc.100 (2016), 349-373.
- [9] K. Kawamura, *Banach Stone Theorem for quaternion-valued continuous function spaces*, Mediterranean J. Math. 13(2016), 4745-4761.
- [10] K. Kawamura and T. Miura, *Real-linear surjective isometries between function spaces*, Top. Appl. 226 (2017), 66-85.
- [11] H. Koshimizu, T. Miura, H. Takagi and S.-E. Takahasi, *Real-linear isometries between subspaces of continuous functions*, J. Math. Anal. Appl. 413 (2014), 229-241.
- [12] T. Miura, *Surjective isometries between function spaces*, Contemp. Math.645, 231-239.
- [13] W. Novinger, *Linear isometries of subspaces of spaces of continuous functions*, Studia Math. 53 (1975), 273-276.
- [14] K. Sundaresan, *Spaces of continuous functions into Banach spaces*, Studia Math. 48 (1973), 15-22.
- [15] J. Väisälä, *A proof of the Mazur-Ulam theorem*, Amer. Math. Monthly 110-7 (2003), 633-635.